Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Васильев Данил Анатольевич

Геометрия пространств модулей стабильных пучков на рациональных многообразиях Фано

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., профессор
Тихомиров Александр Сергеевич

Москва – 2024

Диссертация была выполнена в Лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений НИУ ВШЭ.

Результаты диссертации опубликованы в трех статьях:

1. А. С. Тихомиров, С. А. Тихомиров, Д. А. Васильев, «Построение стабильных расслоений ранга 2 на P3 посредством симплектических расслоений», Сиб. матем. журн., **60**:2 (2019), 441–460.

2. Д. А. Васильев, «Бесконечная серия рациональных компонент пространства модулей пучков ранга 3 на пространстве P3», Сиб. матем. журн., **64**:3 (2023), 465–485.

3. Д. А. Васильев, А. С. Тихомиров, «Модули полустабильных пучков ранга 2 на рациональных трехмерных многообразиях Фано основной серии», Матем. сб., **215**:10 (2024), 3–57.

Общее описание области исследований

Векторные расслоения ранга два на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ были одним из центральных объектов изучения в алгебраической геометрии с 1970-х годов, когда стало известно, что определенные алгебраические расслоения ранга два на $\mathbb{P}^3$ связаны с физическими «инстантонами», определяемым как антиавтодуальные связности на сфере S^4 со структурной группой $\mathrm{SU}(2)$ [5]. Эти расслоения были названы математическими инстантонами. Исследование пространств модулей расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ стало вестись более активно с 2010-х годов, когда было показано, что пространства модулей математических инстантонов с фиксированными классами Черна неприводимы [34, 35]. В то же время, пространства модулей произвольных полустабильных когерентных пучков с фиксированными классами Черна могут иметь несколько неприводимых компонент, и их геометрические свойства далеки от полного понимания. Изучение пучков ранга больше двух на $\mathbb{P}^3$ и изучение пучков ранга 2 на других трехмерных многообразиях Фано только начинает развиваться в последние годы (см., например, недавние статьи [3, 12, 33]).

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту

В данной диссертации мы строим несколько бесконечных серий неприводимых компонент пространств модулей когерентных пучков ранга 2 на рациональных трехмерных многообразиях Фано — на проективном пространстве $X_1 = \mathbb{P}^3$, на гладкой квадрике X_2, на пересечении двух квадрик X_4 и на X_5 — линейном сечении коразмерности 3 грассманиана $\mathrm{Gr}(2,5)$, вложенного в проективное пространство по Плюккеру. В их число входят серии Σ_0 и Σ_1 из статьи [36], серии $M_{k,m,n}$ из теорем 4.2 и 4.3 статьи [40], серия $\widetilde{M}_m$ из теоремы 4.4 *loc. cit.*, серия M_m из теоремы 4.5 *loc. cit.* и серии $M_{k,m,n}$ из теоремы 4.6 *loc. cit.* Также построена серия неприводимых компонент $\mathcal{S}_3(b,c)$ пространства модулей когерентных пучков ранга 3 на $\mathbb{P}^3$ (см. утверждение 2 статьи [39]). Доказана рациональность компонент $\mathcal{S}_3(b,c)$ при $3 \mid (2b+c)$ (см. теорему 2 *loc. cit.*), компонент $\mathcal{S}(0,b,c)$, введённых в [21], (см. теорему 3 *loc. cit.*), компонент из теорем 4.2, 4.3, 4.4, и 4.5 статьи [40], а также компонент из теоремы 4.6 *loc. cit.* для многообразий X_1, X_2 и X_5.

В случае квадрики X_2 мы получаем точные оценки на третий класс Черна c_3 полустабильных пучков ранга 2 с фиксированными c_1 и c_2, и даем описание полустабильных пучков с максимальным c_3 (см. теорему 3.1 статьи [40]). В этом мы следуем работе Шмидта [31], в которой аналогичным образом изучались пучки на проективном пространстве. Важным новым результатом нашей работы является нахождение первого известного примера несвязного пространства модулей полустабильных пучков ранга 2 с фиксированными классами Черна на гладком проективном трехмерном многообразии (см. теорему 5.4 статьи [40]). Также мы даем оценки на третий класс Черна так называемых пучков общего типа на X_4 и X_5 (см. теоремы 6.1 и 6.2 *loc. cit.*).

Место результатов диссертации в общем контексте области исследований

Наши результаты по описанию неприводимых компонент пространств модулей расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ являются продолжением более ранних результатов других математиков, в частности, результатов из статей [34, 35, 29, 14, 2], что описано более подробно в разделе 2. Конструкция неприводимых компонент $\mathcal{S}_3(b, c)$ является развитием идеи построения компонент $\mathcal{S}(a, b, c)$ из статьи [21], что описано в разделе 4. Результаты по описанию полустабильных пучков на квадрике X_2 с максимальным третьим классом Черна являются непосредственным обобщением результатов, полученных Шмидтом для $\mathbb{P}^3$ в [31], см. также разделы 5 и 6.

Методы получения результатов диссертации

Неприводимые компоненты пространства модулей расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ получены при помощи метода монад, введенных в [7]. Используемые при этом монады являются обобщением монад из [2] и также опираются на понятие симплектических инстантонных расслоений. Кроме того, в конструкции данных компонент используются методы теории деформаций. Доказательство рациональности неприводимых компонент $\mathcal{S}_3(b, c)$ основывается на результатах Бялыницкого-Бирулы [6] и использует понятие эквивариантного разрешения особенностей [23]. Описание полустабильных пучков на квадрике X_2 с максимальным третьим классом Черна получено при помощи теории условий стабильности по Бриджленду на трехмерных многообразиях и тилт-стабильности, развитой в [8, 32].

Возможные применения результатов диссертации

Проведенные исследования носят теоретический характер. Их результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения пространств модулей стабильных и полустабильных пучков на многообразиях Фано, и, в частности, для получения точных оценок на третий класс Черна полустабильных пучков ранга 2 на X_4 и X_5.

Структура резюме

Резюме организовано следующим образом. В разделе 1 мы напоминаем определение пространств модулей полустабильных пучков и приводим некоторые предварительные понятия и соглашения. В разделе 2 мы описываем наши совместные с А. С. Тихомировым и С. А. Тихомировым [36] результаты, касающиеся построения двух новых бесконечных серий компонент пространства модулей расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^3$. Содержание раздела 3 основано на результатах Бялыницкого–Бирулы, которые будут использованы в следующем разделе. В разделе 4 мы описываем нашу конструкцию бесконечной серии рациональных компонент пространства модулей стабильных расслоений ранга 3 на $\mathbb{P}^3$ из статьи [39]. В разделе 5 мы напоминаем некоторые понятия, связанные с условиями стабильности объектов производных категорий и даем предварительный материал для следующего раздела. В разделе 6 мы описываем наши совместные с А. С. Тихомировым [40] результаты по описанию пространств модулей полустабильных пучков ранга 2 на описанных выше многообразиях Фано X_i и даем оценки на третий класс Черна таких пучков.

1 Пространства модулей полустабильных пучков

Пространства модулей когерентных пучков были впервые построены Мамфордом [27] для случая векторных расслоений над кривыми при помощи понятия μ-стабильности. Это понятие может быть определено и для пучков над многообразиями большей размерности. Пусть X — гладкое n-мерное проективное многообразие над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики 0, с очень обильным линейным расслоением $\mathcal{O}_X(1)$, соответствующим дивизору H.

Определение 1. *Наклон когерентного пучка E на X определяется формулой $\mu(E) = \frac{H^{n-1}\cdot c_1(E)}{H^n\cdot \mathrm{rk}(E)}$, где $c_1(E)$ обозначает первый класс Черна пучка E, а $\mathrm{rk}(E)$ — ранг E. Здесь результатом деления на 0 полагается $+\infty$.*

Определение 2. *Пучок E называется μ-стабильным (соответственно, μ-полустабильным), если для всех собственных подпучков $0 \neq F \subset E$ выполняется неравенство $\mu(F) < \mu(E/F)$ (соответственно, $\mu(F) \leq \mu(E/F)$).*

Пространства модулей пучков над многообразиями большей размерности были построены Гизекером [16] и Маруямой [25, 26] с использованием другого понятия стабильности. В тех же обозначениях, что и выше, обозначим через $E(m)$ когерентный пучок $E \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m)$.

Определение 3. *Многочлен Гильберта пучка E определяется формулой $P(E, m) = \chi(E(m))$, где $\chi(E(m))$ — эйлерова характеристика пучка $E(m)$.*

Пусть $f, g \in \mathbb{R}[m]$ — ненулевые многочлены. Если $\deg(f) > \deg(g)$, положим $f < g$. Если же $\deg(f) = \deg(g)$, и a, b — старшие коэффициенты многочленов f и g, соответственно, положим $f < (\leq) g$, если $\frac{f(m)}{a} < (\leq) \frac{g(m)}{b}$ для всех $m \gg 0$.

Определение 4. *Когерентный пучок E называется (полу)стабильным по Гизекеру, или просто (полу)стабильным, если для любого собственного подпучка $0 \neq F \subset E$ выполняется $P(F, m) < (\leq) P(E/F, m)$.*

Позднее мы будем использовать другое понятие стабильности пучков, промежуточное между μ-стабильностью и стабильностью по Гизекеру. Пусть теперь $\dim X = 3$. Для когерентного пучка E на X определим числа $a_i(E)$

для $i \in \{0,1,2,3\}$ из формулы $P(E,m) = a_3(E)m^3 + a_2(E)m^2 + a_1(E)m + a_0(E)$. Положим $P_2(E,m) = a_3(E)m^2 + a_2(E)m + a_1(E)$.

Определение 5. *Пучок E называется 2-(полу)стабильным по Гизекеру, если для любого собственного подпучка $0 \neq F \subset E$ выполняется $P_2(F,m) < (\leq) P_2(E/F,m)$.*

Свойства стабильности, 2-стабильности и μ-стабильности пучка связаны следующими импликациями:

$$\begin{array}{ccccc} \mu\text{-стабильность} & \Longrightarrow & 2\text{-стабильность} & \Longrightarrow & \text{стабильность} \\ & & & & \Downarrow \\ \mu\text{-полустабильность} & \Longleftarrow & 2\text{-полустабильность} & \Longleftarrow & \text{полустабильность} \end{array}$$

Для определения пространств модулей напомним следующие понятия.

Определение 6. *Пусть E — полустабильный пучок. Фильтрация Жордана–Гёльдера пучка E — это фильтрация*

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_n = E,$$

такая, что факторы $gr_i(E) = E_1/E_{i-1}$ стабильны и для всех i $P(gr_i(E),m) = c_i P(E,m), c_i \in \mathbb{R}$.

Предложение 1 ([20, Proposition 1.5.2])**.** *Фильтрации Жордана–Гёльдера всегда существуют. Присоединённый градуированный объект $gr(E) = \oplus_i gr_i(E)$ не зависит от выбора фильтрации Жордана–Гёльдера.*

Определение 7. *Полустабильные пучки E_1 и E_2 с одинаковыми многочленами Гильберта называются S-эквивалентными, если $gr(E_1) \cong gr(E_2)$.*

Напомним следующие теоретико-категорные понятия. Для категории $\mathcal{C}$ обозначим через $\mathcal{C}^o$ противоположную категорию, а через $\mathcal{C}'$ — категорию функторов $\mathcal{C}^o \to Sets$, морфизмы в которой — это в точности естественные преобразования. Существует функтор Йонеды, сопоставляющий объекту $X \in \mathcal{C}$ функтор $\underline{X} : Y \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,X)$. Функтор Йонеды вкладывает $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}'$ как полную подкатегорию.

Определение 8. *Функтор $\mathcal{F} \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$ копредставлен объектом $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, если существует $\mathcal{C}'$-морфизм $\alpha : \mathcal{F} \to \underline{F}$, такой, что любой морфизм $\alpha' : \mathcal{F} \to \underline{F'}$ пропускается через единственный морфизм $\beta : \underline{F} \to \underline{F'}$. И функтор $\mathcal{F}$ представлен объектом F, если $\alpha : \mathcal{F} \to \underline{F}$ — изоморфизм.*

Если F представляет функтор $\mathcal{F}$, то он также копредставляет $\mathcal{F}$, и если объект F копредставляет $\mathcal{F}$, то он единствен с точностью до единственного изоморфизма. Приведённые выше определения можно переформулировать, сказав, что F представляет $\mathcal{F}$, если $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, F) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(\underline{X}, \mathcal{F})$ для всех $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, и F копредставляет $\mathcal{F}$, если $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(F, X) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}, \underline{X})$ для всех $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$.

Перейдем к определению наших функторов модулей. Для фиксированного многочлена $P \in \mathbb{Q}[z]$ определим функтор $\mathfrak{M}' : Sch/\mathbb{k} \to Sets$ следующим образом. Для $\mathbb{k}$-схемы S определим $\mathfrak{M}'(S)$ как множество классов изоморфизма S-плоских семейств полустабильных пучков на X с многочленом Гильберта P. Действие функтора $\mathfrak{M}'$ на морфизм $f : S' \to S$ определяется как обратный образ семейства относительно морфизма $f \times \mathrm{id}_X$.

Если $E \in \mathfrak{M}'(S)$ — S-плоское семейство полустабильных пучков, и L — линейное расслоение на S, то $E \otimes p^*L$ (здесь $p : X \times S \to S$ — каноническая проекция) также является S-плоским семейством, и эти два семейства имеют изоморфные слои над любой точкой $s \in S$. Поэтому имеет смысл рассмотрение факторфунктора $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'/\sim$, где $\sim$ есть следующее отношение эквивалентности:

$$E \sim E' \text{ для } E, E' \in \mathfrak{M}'(S) \text{ если и только если } E \cong E' \otimes p^*L \text{ для некоторого } L \in \mathrm{Pic}\, S.$$

Схема $\mathcal{M}$ называется пространством модулей полустабильных пучков, если она копредставляет функтор $\mathfrak{M}$.

Теорема 1 ([20, Theorem 4.3.4])**.** *Существует проективная схема $\mathcal{M}_{\mathcal{O}_X(1)}(P)$, копредставляющая функтор $\mathfrak{M}$. Замкнутые точки $\mathcal{M}_{\mathcal{O}_X(1)}(P)$ находятся в биекции с классами S-эквивалентности полустабильных пучков с многочленом Гильберта P.*

Если пучки с многочленом Гильберта P на трехмерном многообразии X с обильной образующей $\mathcal{O}_X(1)$ его группы Пикара имеют ранг r и классы Черна c_1, c_2, c_3, мы будем обозначать $\mathcal{M}_{\mathcal{O}_X(1)}(P)$ через $\mathcal{M}_X(r; c_1, c_2, c_3)$. Если $r = 2$, то символ r будет иногда опускаться. Также мы будем обозначать через $\mathcal{B}_X(c_1, c_2)$ открытое подмножество схемы $\mathcal{M}_X(2; c_1, c_2, 0)$, соответствующее стабильным локально свободным пучкам. Также, если $X = \mathbb{P}^3$, то индекс X будет иногда опускаться.

В этом резюме под общей точкой неприводимой схемы мы понимаем замкнутую точку, принадлежащую некоторому плотному открытому по Зарисскому подмножеству этой схемы. Иногда мы не будем делать различия между стабильным пучком E и его классом изоморфизма $[E]$ как точкой схемы модулей.

Для когерентного пучка F на X и неотрицательного целого числа n мы будем иногда обозначать пучок $F^{\oplus n}$ через nF. Мы обозначаем группы когомологий $H^i(X,F)$ через $H^i(F)$.

2 Построение стабильных расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ посредством симплектических расслоений ранга 4

При описании пространств модулей $\mathcal{B}(e,n)$ мы можем предполагать, после подкрутки на линейное расслоение, что $e \in \{0,-1\}$. При $e=0$ эти пространства модулей не пусты, если $n \geq 1$, а при $e=-1$, если $n \geq 2$ чётно [17].

К настоящему времени известно [34, 35], что схема $\mathcal{B}(0,n)$ содержит неприводимую компоненту I_n ожидаемой (по теории деформаций) размерности $8n-3$, и эта компонента является замыканием своего гладкого открытого подмножества, состоящего из так называемых математических инстантонных векторных расслоений. Для случая $e=-1$ в [17, Exercise 4.3.2] Хартсхорн построил первую бесконечную серию $\{\mathcal{B}_0(-1,2m)\}_{m\geq 1}$ неприводимых компонент $\mathcal{B}_0(-1,2m) \subset \mathcal{B}(-1,2m)$, имеющих ожидаемую размерность $16m-5$.

Другая бесконечная серия семейств стабильных расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^3$, зависящих от троек целых чисел a,b,c, была описана Рао в 1984 году [29], а в 1988 году Эйн [14] независимо описал эти семейства и доказал, что они образуют открытые подмножества неприводимых компонент пространств $\mathcal{B}(e,n)$.

Определение 9. *Монада [7] — это комплекс*

$$0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{a} \mathcal{B} \xrightarrow{c} \mathcal{C} \to 0$$

векторных расслоений, где a — инъективное отображение расслоений, а c

сюръективно. В этом случае когомологический пучок $E = \frac{\ker c}{\operatorname{im} a}$ локально свободен.

Напомним, что *симплектическая структура* на векторном расслоении E — это антиавтодуальный изоморфизм $\theta : E \xrightarrow{\sim} E^\vee, \theta^\vee = -\theta$, рассматриваемый с точностью до пропорциональности.

Определение 10. *Симплектическое векторное расслоение E на $\mathbb{P}^3$ называется симплектическим инстантоном [2], если*

$$h^0(E(-1)) = h^1(E(-2)) = h^2(E(-2)) = h^3(E(-3)) = 0,$$

$$c_2(E) = n \geq 1.$$

Число $c_2(E)$ называется *зарядом* инстантона E. Спектральная последовательность Бейлинсона показывает, что симплектические инстантоны ранга $2r$ и заряда n — это в точности когомологические пучки антиавтодуальных монад вида

$$0 \to n\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \to (2n + 2r)\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to n\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \to 0. \tag{1}$$

В 2017 году Ч. Алмейда, М. Жардим, А. С. Тихомиров и С. А. Тихомиров [2] построили новую бесконечную серию неприводимых компонент Y_a пространств $\mathcal{B}(0, 1 + a^2)$ для $a \in \{2\} \cup \mathbb{Z}_{\geq 4}$. Эти компоненты имеют размерности $\dim Y_a = 4\binom{a+3}{3} - a - 1$, которые при $a \geq 4$ больше ожидаемых. Общие пучки из этих компонент могут быть описаны как когомологические пучки монад, в которых средний член является симплектическим инстантоном ранга 4 и с $c_2 = 1$, а левый и правый члены — пучками $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-a)$ и $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a)$, соответственно.

В совместной статье с А. С. Тихомировым и С. А. Тихомировым [36] мы построили две новые бесконечные серии неприводимых компонент $\mathcal{M}(e, n)$ пространств $\mathcal{B}(e, n)$, одну для $e = 0$ и одну для $e = -1$, которые обобщают упомянутую выше конструкцию из [2]. А именно, для $e = 0$ мы построили бесконечную серию Σ_0 неприводимых компонент $\mathcal{M}(0, n) \subset \mathcal{B}(0, n)$, такую, что общее расслоение из $\mathcal{M}(0, n)$ может быть описано как когомологический пучок монады вида

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-a) \to \mathrm{E} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a) \to 0, \tag{2}$$

в которой E есть теперь симплектический инстантон с произвольным вторым классом Черна, а a достаточно велико.

Для доказательства того, что когомологические расслоения монад вида (2) образуют плотное открытое подмножество неприводимой компоненты $\mathcal{B}(0,n)$, мы рассматриваем прямую сумму $\mathbb{E}=\mathcal{E}_1\oplus\mathcal{E}_2$ двух математических инстантонов с зарядами $c_2(\mathcal{E}_1)=m\geq 1$ и $c_2(\mathcal{E}_2)=m+\varepsilon$, где $\varepsilon\in\{0,1\}$. Мы доказываем зануление определённых групп когомологий, связанных с общими такими расслоениями. Расслоение $\mathbb{E}$ — симплектический инстантон ранга 4. Это расслоение и его деформации используются как средние члены монад вида (2). Мы строим универсальное семейство Y расслоений E, являющихся когомологическими расслоениями таких монад, и доказываем, что отображение Кодаиры–Спенсера из касательного пространства к Y в заданной точке x_0 в пространство $\mathrm{Ext}^1(E,E)$ является изоморфизмом. Поскольку Y гладко в x_0, это влечёт, что образ Y в $\mathcal{B}(0,n)$ действительно является открытым множеством. Здесь $n=2m+\varepsilon+a^2$.

Формула Хирцебруха–Римана–Роха позволяет найти размерность пространства симплектических инстантонов E, которая равна $H^1(S^2\mathbb{E})$ по теории деформаций, и размерность $H^0(\mathbb{E}(a))=\chi(\mathbb{E}(a))$. Мы получаем, что размерность $\mathcal{M}(0,n)$ равна $4\binom{a+3}{3}+(2m+\varepsilon)(10-a)-11$.

Мы доказали [36, Theorem 1], что серия Σ_0 содержит компоненты $\mathcal{M}(0,n)$ для всех $n\gg 0$ (более точно, по крайней мере для всех $n\geq 146$). Серия Σ_0 является первой после инстантонной $\{I_n\}_{n\geq 1}$ серией с таким свойством (для серии Эйна вопрос о том, содержит ли она компоненты для всех достаточно больших значений второго класса Черна, является открытым).

В случае $e=-1$ мы, аналогичным образом, построили серию Σ_1 неприводимых компонент $\mathcal{M}(-1,n)$ пространств $\mathcal{B}(-1,n)$, где n четно, таким образом, что общее расслоение из $\mathcal{M}(-1,n)$ является когомологическим расслоением монады, аналогичной приведённой выше, в которой средний член является так называемым скрученным симплектическим инстантонным расслоением ранга 4 с первым классом Черна -2 и произвольным четным вторым классом Черна, тогда как левый и правый члены — это теперь $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-a-1)$ и $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a)$, соответственно, с достаточно большим a. В качестве тестового скрученного симплектического инстантонного расслоения ранга 4 мы рассматриваем прямую сумму $\mathcal{E}_1\oplus\mathcal{E}_2$, где $\mathcal{E}_1\in\mathcal{B}_0(-1,2m),\mathcal{E}_2\in\mathcal{B}_0(-1,2(m+\varepsilon)),\varepsilon\in\{0,1\}$. Мы имеем $n=4m+2\varepsilon+a(a+1)$. Размерность получающейся компоненты равна $4\binom{a+3}{3}+2\binom{a+3}{2}-(2m+\varepsilon)(2a-19)-17$.

Мы доказали [36, Theorem 2], что Σ_1 содержит компоненты $\mathcal{M}(-1,n)$ для асимптотически всех достаточно больших четных n. Более точно, если $\mathcal{N}$ есть множество тех n, для которых существует компонента $\mathcal{M}(-1,n)\in\Sigma_1$, то

$$\lim_{r\to\infty}\frac{|\mathcal{N}\cap\{2,4,\ldots,2r\}|}{r}=1.$$

Также в [36, §4] мы нашли все значения $n\leq 20$, для которых существует компонента $\mathcal{M}(0,n)$. Мы нашли их размерности и спектры общих расслоений из этих компонент. И мы сделали то же для всех компонент $\mathcal{M}(-1,n)$ с $n\leq 40$.

3 Результаты Бялыницкого-Бирулы

В статье [39] мы доказали рациональность неприводимых компонент модулей стабильных пучков на $\mathbb{P}^3$ из двух бесконечных серий (пучков ранга 2 и ранга 3, соответственно). Основное техническое средство доказательства образуют результаты Бялыницкого-Бирулы [6], которые мы напоминаем в этом разделе.

Рассмотрим алгебраическую групповую схему G над $\Bbbk$ и алгебраическую схему Y над $\Bbbk$. Тогда $G\times Y$ имеет естественную структуру групповой схемы над Y. Рассмотрим конечномерное векторное пространство V над $\Bbbk$ и гомоморфизм групп $\alpha: G\to GL(V)$.

Следуя [6], будем называть *тривиальным α-расслоением над Y* Y-схему $V\times Y$ с действием $G\times Y$, индуцированным α. Y-схема X называется *α-расслоением*, если существует открытое покрытие $Y=\bigcup_i Y_i$, такое, что расслоенное произведение $X\times_Y Y_i$ как Y_i-схема изоморфно тривиальному α-расслоению над Y_i для каждого i. Y-схема X с действием $G\times Y$ называется *G-расслоением*, если существует открытое покрытие $Y=\bigcup_i Y_i$, такое, что $X\times_Y Y_i$ для каждого i является α_i-расслоением над Y_i, для некоторого $\alpha_i: G\to GL(V_i)$. Если $\dim V_i=n$ для каждого i, мы говорим, что G-расслоение имеет *размерность* n.

С этого времени мы полагаем $G=\mathbb{G}_m$. Если V — векторное пространство над $\Bbbk$ с линейным представлением G, то мы обозначим через V^0 подпредставление, состоящее из всех векторов $v\in V$ с $G(\Bbbk)\cdot v=v$. Обозначим подпредставления, являющиеся линейными оболочками тех $v\in V$, что для

$\lambda \in G(\Bbbk) \cong \Bbbk^\times$ результат действия λ на v равен $\lambda^m v$ с $m > 0$ и $m < 0$ через V^+ и V^-, соответственно. Мы имеем $V = V^0 \oplus V^+ \oplus V^-$. Заметим, что для действия G на алгебраической $\Bbbk$-схеме X и для замкнутой $a \in X^G$ из неподвижного множества на касательном пространстве $T_a(X)$ имеется каноническое представление G.

В следующем предложении все алгебраические схемы считаются приведенными, а X — неособая проективная алгебраическая схема с действием G.

Предложение 2 ([6, Theorem 4.1])**.** *Если $X^G = \bigcup_{i=1}^r (X^G)_i$ — разложение X^G на связные компоненты, то для каждого $i = 1, \dots, r$ существует единственная локально замкнутая неособая G-инвариантная подсхема X_i^+, соответственно, X_i^- схемы X, а также единственный морфизм $\gamma_i^+ : X_i^+ \to (X^G)_i$, соответственно, $\gamma_i^- : X_i^- \to (X^G)_i$, такие, что выполняется следующее:*

(a) *$(X^G)_i$ является замкнутой подсхемой схемы X_i^+, соответственно, X_i^-, и морфизм $\gamma_i^+|_{(X^G)_i}$, соответственно, $\gamma_i^-|_{(X^G)_i}$, является тождественным;*

(b) *X_i^+, соответственно, X_i^-, с индуцированным действием G и морфизмом γ_i^+, соответственно, γ_i^- является G-расслоением над $(X^G)_i$;*

(c) *для любой замкнутой точки $a \in (X^G)_i$ мы имеем*

$$T_a(X_i^+) = T_a(X)^0 \oplus T_a(X)^+, \qquad T_a(X_i^-) = T_a(X)^0 \oplus T_a(X)^-.$$

Размерность G-расслоения, определенного в (b)*, равняется $T_a(X)^+$, соответственно, $T_a(X)^-$ для любой замкнутой $a \in (X^G)_i$.*

Более того, $X = \bigcup_{i=1}^r X_i^+ = \bigcup_{i=1}^r X_i^-$, согласно [6, Theorem 4.3].

Если задано действие $\eta : \mathbb{G}_m \times X \to X$ группы $\mathbb{G}_m$ на собственном алгебраическом многообразии X и $p \in X$, отображение $\eta(-,p) : \mathbb{A}^1 \backslash \{0\} \cong \mathbb{G}_m \to X$ однозначно продолжается до регулярного отображения $\overline{\eta(-,p)} : \mathbb{A}^1 \to X$, и мы будем обозначать $\overline{\eta(-,p)}(0)$ через $\eta^0(p)$.

Наше доказательство рациональности компонент модулей основывается на следующем простом следствии предложения 2.

Лемма 1 ([39, Lemma 1])**.** *Рассмотрим неособое проективное многообразие X с действием η группы $G = \mathbb{G}_m$. Предположим, что для плотного открытого подмножества $U \subset X$ существует рациональное подмногообразие $Y \subset X^G$, такое, что $\eta^0(u) \in Y$ для каждой точки $u \in U$. Тогда X рационально.*

Действительно, в ситуации леммы U изоморфно плотному открытому подмножеству G-расслоения над Y, поэтому U бирационально изоморфно произведению Y на аффинное пространство.

4 Бесконечная серия рациональных компонент модулей пучков ранга 3 на $\mathbb{P}^3$

Напомним, что пучок F называется *рефлексивным*, если естественное отображение $F \to F^{\vee\vee}$ является изоморфизмом. Рефлексивные пучки в различных отношениях более просты для изучения, чем общие когерентные пучки, например, рефлексивный пучок F ранга 2 на $\mathbb{P}^n$ с $c_1(F) \in \{-1, 0\}$ стабилен тогда и только тогда, когда $H^0(F) = 0$ [28, Chapter 2, Lemma 1.2.5].

В работе [21, Section 2.2] М. Жардим, Д. Маркушевич и А. С. Тихомиров рассматривали морфизмы

$$a\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \oplus b\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \oplus c\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{\alpha} (a+b+c+2)\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3},$$

особое множество которых

$$\Delta(\alpha) = \{x \in \mathbb{P}^3 \mid \alpha(x) \text{ не инъективно}\}$$

является нульмерным. В такой ситуации $\operatorname{coker}(\alpha)$ является стабильным рефлексивным пучков ранга 2. Если $3a + 2b + c = 2k$ четно и положительно, то, обозначая нормализованный пучок $\operatorname{coker}(\alpha)(-k)$ через E, мы получаем точную последовательность

$$0 \to a\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3-k) \oplus b\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2-k) \oplus c\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1-k) \xrightarrow{\alpha} (a+b+c+2)\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-k) \to E \to 0, \tag{3}$$

где $c_1(E) = 0$. Жардим, Маркушевич и Тихомиров показали [21, Theorem 8], что семейство пучков E, включающихся в точные тройки вида (3), образует гладкое плотное открытое подмножество $\mathcal{S}(a, b, c)$ неприводимой компоненты пространства модулей стабильных рефлексивных пучков ранга 2 на $\mathbb{P}^3$. Для простоты мы будем называть $\mathcal{S}(a, b, c)$ неприводимой компонентой.

В статье [39] мы предлагаем аналог приведенной выше конструкции для пучков ранга 3, рассматривая морфизмы

$$b\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \oplus c\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{\alpha} (b+c+3)\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}, \tag{4}$$

особое множество которых $\Delta(\alpha) = \{x \in \mathbb{P}^3 \mid \alpha(x) \text{ не инъективно}\}$ пусто или нульмерно. Здесь $\operatorname{coker}(\alpha)$ оказывается рефлексивным пучком ранга 3.

Рассмотрим действие $\eta_{\mathbb{P}^3}$ группы $\mathbb{G}_m$ на $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(V)$, задаваемое в координатах как

$$\eta_{\mathbb{P}^3} : \mathbb{G}_m \times \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3, \quad (t, (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)) \mapsto (x_0 : tx_1 : tx_2 : tx_3).$$

Заметим, что неподвижные точки для этого действия — это $a_0 := (1 : 0 : 0 : 0)$ и точки плоскости $H := \{x_0 = 0\}$.

Действие $\eta_{\mathbb{P}^3}$ группы $\mathbb{G}_m$ на $\mathbb{P}^3$ индуцирует действие $\mathbb{G}_m$ на множестве когерентных пучков на $\mathbb{P}^3$, задаваемое на замкнутых точках как $E \mapsto t^*E$, где для $t \in \mathbb{G}_m(\Bbbk)$ мы обозначаем той же буквой действие t на $\mathbb{P}^3$.

Стабильность пучка $\operatorname{coker} \alpha$ из (4) не очевидна. Существует сравнительно простой критерий μ-стабильности рефлексивных пучков ранга 3:

Критерий μ-стабильности ([28, Remark 1.2.6])**.** *Рефлексивный пучок E ранга 3 на $\mathbb{P}^n$ с $c_1(E) = 0$, соответственно, $c_1(E) = -1, -2$, является μ-стабильным тогда и только тогда, когда $H^0(\mathbb{P}^n, E) = H^0(\mathbb{P}^n, E^\vee) = 0$, соответственно, $H^0(\mathbb{P}^n, E) = H^0(\mathbb{P}^n, E^\vee(-1)) = 0$.*

Пусть $b, c \geq 0$, $k \geq 1$, $c_1 \in \{0, -1, -2\}$, и $2b + c = 3k + c_1$. Рассмотрим пучок E на $\mathbb{P}^3$ ранга 3 с первым классом Черна c_1, включающийся в точную тройку

$$0 \to b\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-k-2) \oplus c\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-k-1) \xrightarrow{\alpha} (b+c+3)\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-k) \to E \to 0; \qquad (5)$$

причем множество вырождения $\Delta(\alpha)$ пусто или нульмерно; как и для пучков ранга 2 в [21, Section 2.2], это условие выполняется для общего α.

Мы доказали следующий вспомогательный результат:

Теорема 2 ([39, Theorem 1])**.** *Для всех b и c, кроме $(b, c) = (0, 1)$, существует $\mathbb{G}_m$-инвариантный стабильный по Гизекеру рефлексивный пучок E ранга 3, включающийся в точную тройку вида (5), ограничение которого на H стабильно и локально свободно.*

Для всех случаев, кроме $(b, c) = (0, 3)$ и $(b, c) = (3, 0)$ доказательство ведется путем предъявления явного $\alpha : b\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-k-2) \oplus c\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-k-1) \xrightarrow{\alpha} (b+c+3)\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-k)$ и доказательства того, что $E = \operatorname{coker} \alpha$ μ-стабилен при помощи критерия μ-стабильности, приведенного выше. В оставшихся двух случаях мы адаптируем рассуждения из [38], чтобы показать, что для общего отображения α как выше пучок $E = \operatorname{coker} \alpha$ стабилен по Гизекеру.

Можно показать, что отображение $\mathrm{Hom}(b\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2-k)\oplus c\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1-k),(b+c+3)\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-k))\to \mathrm{Ext}^1(E,E)$, индуцированное точной тройкой (5), сюръективно. Также $\mathrm{Ext}^2(E,E)=0$. Это влечет следующее утверждение:

Предложение 3 ([39, Assertion 2]). *Пространство модулей стабильных по Гизекеру пучков E в (5) является гладким плотным открытым подмножеством $\mathcal{S}_3(b,c)$ неприводимой компоненты пространства модулей стабильных по Гизекеру рефлексивных пучков ранга 3 на $\mathbb{P}^3$.*

Размерность компоненты $\mathcal{S}_3(b,c)$, содержащей точку $[E]$, равняется $12c_2(E)-8$, если $c_1(E)=0$; соответственно, $12c_2(E)-12$, если $c_1(E)=-1$; или $12c_2(E)-24$, если $c_1(E)=-2$.

Как и выше, $b,c\geq 0$, $k\geq 1$, $c_1\in\{0,-1,-2\}$, и $2b+c=3k+c_1$. Пусть $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$, включающийся в точную тройку вида

$$0\to b\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2-k)\oplus c\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1-k)\xrightarrow{\alpha'}(b+c+3)\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-k)\to\mathcal{E}\to 0. \qquad (6)$$

Наше доказательство теоремы 2 показывает также, что общий такой пучок стабилен по Гизекеру. Рассуждения, сходные со случаем пучков на $\mathbb{P}^3$ показывают, что пространство модулей стабильных пучков $\mathcal{E}$ является плотным открытым подмножеством неприводимой компоненты пространства модулей стабильных векторных расслоений ранга 3 на $\mathbb{P}^2$ с первым классом Черна c_1; обозначим это подмножество через $\mathcal{Y}$.

Обозначим через $M_{\mathbb{P}^2}(k,n)$ многообразие модулей стабильных векторных расслоений V ранга k на $\mathbb{P}^2$ с классами Черна $c_1(V)=0$ и $c_2(V)=n$. Мы используем следующий результат [22, Corollary 0.3.a]:

Предложение 4. *Если $(k,n)=1,2,3,4$, то $M_{\mathbb{P}^2}(k,n)$ рационально.*

В нашем случае $k=3$ и $(k,n)\in\{1,3\}$, так что многообразие $M_{\mathbb{P}^2}(3,n)$ рационально для любого n. Таким образом, $\mathcal{Y}$ рационально при $c_1(\mathcal{E})=0$, то есть при $3\mid(2b+c)$.

Теорема 3 ([39, Theorem 2]). *Многообразие $\mathcal{S}_3(b,c)$ рационально при $3\mid(2b+c)$.*

Приведем основные шаги доказательства. Для простоты обозначений положим $\mathcal{S}:=\mathcal{S}_3(b,c)$. Обозначим через $\mathcal{S}^0\subset\mathcal{S}$ подмногообразие классов изоморфизма тех пучков из $\mathcal{S}$, которые не имеют особенностей на $H = \{x_0 = 0\}$. Через $\mathcal{S}^0_{\mathrm{inv}} \subset \mathcal{S}^0$ обозначим подмногообразие классов изоморфизма $\mathbb{G}_m$-инвариантных пучков из $\mathcal{S}^0$.

Лемма 2 ([39, Lemma 7]). *Многообразие $\mathcal{S}^0_{\mathrm{inv}}$ рационально при $3 \mid (2b+c)$.*

Эта лемма доказывается путем построения взаимно обратных морфизмов между плотными открытыми подмножествами многообразий $\mathcal{S}^0_{\mathrm{inv}}$ и $\mathcal{Y}$. Точное определение этих морфизмов использует конструкцию пространств модулей стабильных пучков при помощи схем Quot.

Доказательство рациональности $\mathcal{S}_3(b,c)$ при $3 \mid (2b+c)$ завершается рассмотрением проективного замыкания $\mathcal{S} \subset \overline{\mathcal{S}}$, эквивариантного разрешения особенностей $\Pi : \overline{\mathcal{S}}_{\mathrm{sm}} \to \overline{\mathcal{S}}$ с действием $\eta_{\overline{\mathcal{S}}_{\mathrm{sm}}}$ группы $\mathbb{G}_m$ и использованием леммы 1, так как для точек x из плотного открытого подмножества многообразия $\overline{\mathcal{S}}_{\mathrm{sm}}$ соответствующие точки $\eta^0_{\overline{\mathcal{S}}_{\mathrm{sm}}}(x)$ принадлежат многообразию, изоморфному плотному открытому подмножеству многообразия $\mathcal{S}^0_{\mathrm{inv}}$, которое рационально.

Кроме того, при помощи того же метода в [39, §5] мы доказываем рациональность компонент $\mathcal{S}(0,b,c)$ пространства модулей пучков ранга 2 на $\mathbb{P}^3$.

5 Стабильность объектов производных категорий

С этого времени мы предполагаем, что основное поле есть поле комплексных чисел.

В 1980 году Р. Хартсхорн, исследуя в [18] спектры стабильных рефлексивных когерентных пучков ранга 2 на $\mathbb{P}^3$, доказал ограниченность третьего класса Черна c_3 таких пучков для фиксированных первых двух классов Черна c_1 и c_2. Точные оценки, полученные им для класса c_3 имеют следующий вид (см. [18, Thm. 8.2])

$$c_3 \le c_2^2 - c_2 + 2, \quad \text{если} \quad c_1 = 0; \qquad\qquad c_3 \le c_2^2 \quad \text{если} \quad c_1 = -1. \tag{7}$$

В той же работе доказаны неприводимость, гладкость и рациональность пространств модулей таких пучков с $c_1 = -1$, произвольным $c_2 > 0$ и максимальным $c_3 = c_2^2$.

В 2018 году Б. Шмидт в [31], исследуя свойства тилт-стабильности в ограниченной производной категории когерентных пучков $\mathrm{D}^b(\mathbb{P}^3)$, доказал, что оценки (7) верны для всех полустабильных когерентных пучков ранга два на $\mathbb{P}^3$, и дал явное описание их пространств модулей для $-1 \leq c_1 \leq 0$, $c_2 > 0$ и максимального c_3. Как следствие, он получил, что эти пространства являются неприводимыми гладкими рациональными проективными многообразиями, кроме одного случая, который изучался ранее в [38]. Нетрудно видеть, что пространства модулей рефлексивных пучков, описанные Хартсхорном, являются открытыми подмножествами этих многообразий. Заметим также, что в недавней работе 2023 года [33], Шмидт обобщил упомянутые результаты на случай пучков на $\mathbb{P}^3$ всех рангов от 0 до 4.

В совместной работе с А. С. Тихомировым [40] мы изучали пространства модулей полустабильных пучков ранга два на рациональных трехмерных многообразиях Фано основной серии. Существуют четыре таких многообразия — это проективное пространство $X_1 = \mathbb{P}^3$, трехмерная квадрика X_2, полное пересечение X_4 двух квадрик в $\mathbb{P}^5$ и сечение X_5 грассманиана $\mathrm{Gr}(2,5)$, вложенного по Плюккеру в пространство $\mathbb{P}^9$, линейным подпространством $\mathbb{P}^6$. Здесь индекс i в обозначении X_i обозначает проективную степень многообразия X_i.

Напомним понятие тилт-стабильности, следуя изложению в [31]. Пусть X — одно из многообразий $X_i,\ i = 1,\ 2,\ 4,\ 5$. Кольцо когомологий $H^*(X,\mathbb{Z})$ порождено классами гиперплоского сечения $H \in H^2(X,\mathbb{Z})$, прямой $L \in H^4(X,\mathbb{Z})$ (понимаемой как проективная прямая в пространстве $\mathbb{P}^{2+i} \supset X_i = X$ для $i = 1, 2$, соответственно, $X_i \hookrightarrow \mathbb{P}^{1+i}$ для $i = 4, 5$) и точки $\{\mathrm{pt}\} \in H^6(X,\mathbb{Z})$ (для простоты мы также обозначаем класс точки через 1).

Пусть $\beta \in \mathbb{R}$. Определим *скрученный характер Черна* как $\mathrm{ch}^\beta = e^{-\beta H}\cdot\mathrm{ch}$. Приведем явные формулы для компонент $\mathrm{ch}_i^\beta = \mathrm{ch}_i^\beta(E)$:

$$\begin{aligned} &\mathrm{ch}_0^\beta = \mathrm{rk}(E),\ \mathrm{ch}_1^\beta = \mathrm{ch}_1 - \beta H\mathrm{ch}_0,\ \mathrm{ch}_2^\beta = \mathrm{ch}_2 - \beta H\mathrm{ch}_1 + \frac{\beta^2}{2}H^2\mathrm{ch}_0, \\ &\mathrm{ch}_3^\beta = \mathrm{ch}_3 - \beta H\mathrm{ch}_2 + \frac{\beta^2}{2}H^2\mathrm{ch}_1 - \frac{\beta^3}{6}H^3\mathrm{ch}_0. \end{aligned} \tag{8}$$

Определим *пару кручения*

$$\mathcal{T}_\beta = \{E \in \mathrm{Coh}(X)\colon \text{любой фактор } E \to G \text{ удовлетворяет } \mu(G) > \beta\},$$

$$\mathcal{F}_\beta = \{E \in \mathrm{Coh}(X)\colon \text{любой подпучок } 0 \neq F \to E \text{ удовлетворяет } \mu(F) \leq \beta\}$$

и категорию $\mathrm{Coh}^\beta(X)$ как замыкание относительно расширений $\langle \mathcal{F}_\beta[1], \mathcal{T}_\beta\rangle$ в $D^b(X)$. Для $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *тилт-наклон* объекта $E \in \mathrm{Coh}^\beta(X)$ определяется как

$$\nu_{\alpha,\beta}(E) = \nu_{\alpha,\beta}(\mathrm{ch}_0(E), \mathrm{ch}_1(E), \mathrm{ch}_2(E)) = \frac{H \cdot \mathrm{ch}_2^\beta(E) - \frac{\alpha^2}{2} H^3 \cdot \mathrm{ch}_0^\beta(E)}{H^2 \cdot \mathrm{ch}_1^\beta(E)}.$$

Объект $E \in \mathrm{Coh}^\beta(X)$ называется *тилт-(полу)стабильным* (или $\nu_{\alpha,\beta}$-*(полу)стабильным*), если для любого подобъекта $0 \neq F \hookrightarrow E$ мы имеем $\nu_{\alpha,\beta}(F) < (\leq)\, \nu_{\alpha,\beta}(E/F)$.

Связь между тилт-стабильностью и стабильностью по Гизекеру дается следующим утверждением.

Предложение 5 ([40, Proposition 2.1 (i)]). *Объект $E \in \mathrm{Coh}^\beta(X)$ $\nu_{\alpha,\beta}$-(полу)стабилен для $\beta < \mu(E)$ и $\alpha \gg 0$ тогда и только тогда, когда E — 2-(полу)стабильный пучок.*

Напомним также конструкцию условий стабильности по Бриджленду на X. Пусть

$$\mathcal{T}'_{\alpha,\beta} = \{E \in \mathrm{Coh}^\beta(X) \mid \text{любой фактор } E \twoheadrightarrow G \text{ удовлетворяет } \nu_{\alpha,\beta}(G) > 0\},$$
$$\mathcal{F}'_{\alpha,\beta} = \{E \in \mathrm{Coh}^\beta(X) \mid \text{любой подобъект } 0 \neq F \hookrightarrow E \text{ удовлетворяет } \nu_{\alpha,\beta}(F) \leq 0\},$$

и положим $\mathcal{A}^{\alpha,\beta}(X) = \langle \mathcal{F}'_{\alpha,\beta}[1], \mathcal{T}'_{\alpha,\beta}\rangle$. Для любого $s > 0$ определим

$$\lambda_{\alpha,\beta,s} = \frac{\mathrm{ch}_3^\beta - s\alpha^2 H^2 \cdot \mathrm{ch}_1^\beta}{H \cdot \mathrm{ch}_2^\beta - \frac{\alpha^2}{2} H^3 \cdot \mathrm{ch}_0^\beta}.$$

Объект $E \in \mathcal{A}^{\alpha,\beta}(X)$ называется $\lambda_{\alpha,\beta,s}$-(полу)стабильным, если для любого нетривиального подобъекта $F \hookrightarrow E$ мы имеем $\lambda_{\alpha,\beta,s}(F) < (\leq) \lambda_{\alpha,\beta,s}(E)$.

Заметим, что $\mathrm{D}^b(X_2)$ обладает полным сильным исключительным набором $(\mathcal{O}_{X_2}(-1), \mathcal{S}(-1), \mathcal{O}_{X_2}, \mathcal{O}_{X_2}(1))$, где $\mathcal{S}$ — спинорное расслоение на X_2. Следующие результаты Шмидта могут быть использованы для описания пучков на X_2 с заданным характером Черна.

Предложение 6 ([30],[32, Thm. 6.1(2)]). *(i) Пусть $\alpha < \frac{1}{3}, \beta \in [-\frac{1}{2}, 0], s = \frac{1}{6}$. Для любого $\gamma \in \mathbb{R}$ определим пару кручения*

$$\mathcal{T}''_\gamma = \{E \in \mathcal{A}^{\alpha,\beta}(X_2) \mid \textit{любой фактор } E \twoheadrightarrow G \textit{ удовлетворяет } \lambda_{\alpha,\beta,s}(G) > \gamma\},$$
$$\mathcal{F}''_\gamma = \{E \in \mathcal{A}^{\alpha,\beta}(X_2) \mid \textit{любой подобъект } 0 \neq F \hookrightarrow E \textit{ удовлетворяет } \lambda_{\alpha,\beta,s}(F) \leq \gamma\}.$$

Существует $\gamma \in \mathbb{R}$, такое, что

$$\langle \mathcal{T}''_\gamma, \mathcal{F}''_\gamma[1] \rangle = \mathfrak{C} := \langle \mathcal{O}_{X_2}(-1)[3], \mathcal{S}(-1)[2], \mathcal{O}_{X_2}[1], \mathcal{O}_{X_2}(1) \rangle.$$

(ii) Пусть v — характер Черна объекта из $\mathrm{D}^b(X)$, и $\alpha_0 > 0, \beta_0 \in \mathbb{R}$, и $s > 0$ таковы, что $\nu_{\alpha_0,\beta_0}(v) = 0$, $H^2 \cdot v_1^{\beta_0} > 0$, и $\Delta(v) \geq 0$. Предположим, что все ν_{α_0,β_0}-полустабильные объекты класса v ν_{α_0,β_0}-стабильны. Тогда существует окрестность U точки (α_0, β_0) такая, что для всех $(\alpha, \beta) \in U$ с $\nu_{\alpha,\beta}(v) > 0$ объект $E \in \mathrm{Coh}^\beta(X)$ с $\mathrm{ch}(E) = v$ $\nu_{\alpha,\beta}$-полустабилен тогда и только тогда, когда он $\lambda_{\alpha,\beta,s}$-полустабилен.

6 Модули пучков ранга 2 на трехмерных многообразиях Фано

Первое направление исследований в нашей статье [40] касается вопроса ограниченности третьего класса Черна c_3 полустабильных пучков ранга 2 на X (как и в предыдущем разделе, X — рациональное трехмерное многообразие основной серии) с фиксированными $c_1 \in \{-1, 0\}$ и $c_2 \geq 0$ и получении оценок на третий класс Черна c_3. При помощи техники тилт-стабильности в производной категории $\mathrm{D}^b(X)$, мы даем почти полный ответ на этот вопрос для трехмерной квадрики X_2 в следующей теореме (см. пункты (3.1)-(4.2) в [40, Theorem 3.1]).

Теорема 4. *(i) Пусть E полустабильный пучок ранга 2 на квадрике X_2 с $c_1 = -1$. Тогда $c_2 \geq 0$ и $c_3 \leq \frac{1}{2}c_2^2$, если c_2 четно, и, соответственно, $c_3 \leq \frac{1}{2}(c_2^2 - 1)$, если c_2 нечетно.*
(ii) Пусть E — полустабильный пучок ранга 2 на X_2 с $c_1(E) = 0$. Тогда $c_2 \geq 0$ и $c_3 \leq \frac{1}{2}c_2^2$, если c_2 четно, и, соответственно, $c_3 \leq \frac{1}{2}(c_2^2 + 1)$, если c_2 нечетно.
Эти оценки точны для всех $c_3 \geq 0$.

Доказательство этой теоремы основывается на изучении связи между тилт-полустабильностью и полустабильностью по Бриджленду в $\mathrm{D}^b(X_2)$. Ключевым здесь является важный технический результат Шмидта (2014) по описанию подкатегории в $\mathrm{D}^b(X_2)$, порожденной парой кручения, который мы привели в предложении 6 (i).

К сожалению, к настоящему времени не получены аналоги этого результата для многообразий X_4 и X_5. Поэтому для этих многообразий невозможно использовать тот же метод для получения точных верхних оценок на класс c_3 для всех полустабильных пучков ранга 2 на X_4 и X_5. Однако, используя более традиционный метод рассмотрения поведения стабильных пучков при стандартных бирациональных преобразованиях $X_4 \dashrightarrow X_1$ и $X_5 \dashrightarrow X_2$, мы даем частичный ответ на вопрос об ограниченности c_3 для достаточно широкого класса пучков на X_4 и X_5.

Для $X = X_4$ или X_5 обозначим через $B(X)$ базу семейства прямых на X. Как известно, $B(X_4)$ является гладкой абелевой поверхностью, а $B(X_5) \simeq \mathbb{P}^2$. Дадим следующее определение.

Определение 11. *Рефлексивный пучок E ранга 2 с первым классом Черна $c_1(E) = 0$ на $X = X_4$ или $X = X_5$ называется пучком общего типа, если для любой прямой $l \in B(X)$, не проходящей через точки из* Sing E, *мы имеем либо $E|_l \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 2}$, и такие прямые образуют плотное открытое подмножество $B(X)$, либо $E|_l \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-m)$, где $m > 0$, и множество $B_2(X) := \{l \in B(X) \mid E|_l \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-m),\ m \geq 2\}$ имеет размерность ≤ 0.*

В [40, Theorem 4.4] мы привели примеры бесконечных серий компонент пространств модулей полустабильных пучков, в которых общий пучок является рефлексивным пучком общего типа. (Предположительно, свойство быть пучком общего типа выполняется для всех стабильных рефлексивных пучков ранга 2 с $c_1 = 0$, то есть, возможно, для них имеет место аналог теоремы Грауэрта-Мюлиха, которая верна для стабильных рефлексивных пучков ранга 2 на X_1.) Для пучков общего типа мы доказали следующую теорему (см. [40, Theorem 6.4, Theorem 6.1]).

Теорема 5. *Пусть E — стабильный рефлексивный пучок ранга 2 общего типа с классами Черна $c_1 = 0$, $c_2 > 0$, c_3 на многообразии X_4 или X_5. Тогда следующие неравенства верны для класса c_3 пучка E.*
(i) На X_4: $c_3 \leq c_2^2 - c_2 + 2$.
(ii) На X_5: $c_3 \leq \frac{2}{9}c_2^2$, если c_2 четно, и, соответственно, $c_3 \leq \frac{2}{9}c_2^2 + \frac{1}{2}$, если c_2 нечетно.
Неизвестно, являются ли эти оценки наилучшими.

Второе направление исследований в статье [40] — это построение новых бесконечных серий (с растущим классом c_2) компонент модулей полустабильных пучков ранга 2 на многообразиях X_1, X_2, X_4 и X_5, включающее явное описание общих пучков в этих компонентах. Для $X = X_1$ несколько известных серий компонент модулей были упомянуты выше. Для X_2, X_4 и X_5 до нашей работы было известно только по одной бесконечной серии компонент модулей. Это серии компонент, содержащих как открытые множества семейства инстантонных расслоений. Инстантонные расслоения на X_2 были определены Л. Костой и Р. М. Миро-Ройг [13] в 2009 году, а на X_4, X_5 и других многообразиях Фано А. Кузнецовым [24] в 2012 году и Д. Фаенци [15] в 2013 году. В работе [15] Д. Фаенци доказал, что семейства инстантонных расслоений на X_2, X_4 и X_5 действительно образуют открытые подмножества неприводимых компонент пространств модулей, которые приведены в общей точке и имеют ожидаемую размерность. В последние годы, значительное число работ было посвящено изучению инстантонных серий расслоений, обзор которых можно найти, например, в [3] и [12].

В нашей статье [40] мы построили несколько серий неприводимых рациональных компонент пространств модулей полустабильных пучков ранга 2 на многообразиях X_1, X_2, X_4 и X_5. Мы описали общие пучки в этих компонентах и доказали их рефлексивность, и нашли размерности построенных компонент. Эти результаты доказаны в [40, Theorem 4.1, Theorem 4.1S, Theorem 4.2, Theorem 4.2S, Theorem 4.3]. Они собраны в теореме 6, приведенной ниже.

Упомянем, что общие пучки в этих компонентах описываются как расширения, в которых левый член является либо подкрученным тривиальным расслоением ранга два, либо подкрученным спинорным расслоением на X_2, либо подкрученным пучком F ранга два, который мы опишем ниже.

(I) В случае $X = X_1$ пучок F — рефлексивный пучок, определяемый из точной тройки

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{\oplus 3} \to F \to 0. \qquad (9)$$

(II) В случае, когда $X = X_4$ — полное пересечение общего пучка гиперквадрик в $\mathbb{P}^5$, пусть $\mathbb{P}^1 \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(2)|$ — база этого пучка квадрик, а Γ — гиперэллиптическая кривая рода 2, определенная как двойное накрытие $\rho: \Gamma \to \mathbb{P}^1$, разветвленное в точках, соответствующих вырожденным квадрикам из пучка. Пусть $\Gamma^* = \rho^{-1}(\mathbb{P}^{1*})$, где $\mathbb{P}^{1*} \subset \mathbb{P}^1$ — открытое подмножество невырожденных квадрик из пучка, и пусть $\Delta = \rho^{-1}(\mathbb{P}^1 \smallsetminus \mathbb{P}^{1*})$. Любая точка $y \in \Gamma^*$ соответствует одной из двух серий плоскостей на невырожденной четырехмерной квадрике $Q(y) := \rho(y)$, и эта серия соответствует спинорному расслоению $\mathcal{S}(y)$ ранга 2 на $Q(y)$ с $\det \mathcal{S}(y) = \mathcal{O}_{Q(y)}(1)$. В этом случае мы положим $F_y = \mathcal{S}(y)|_X$. Пусть теперь $y \in \Delta$, то есть, вырожденная квадрика $Q(y)$ является конусом с вершиной в некоторой точке $z(y)$, так что определена проекция $\mu : Q(y) \smallsetminus \{z(y)\} \to Q_y$, где Q_y — гладкая трехмерная квадрика. На Q_y определено спинорное расслоение $\mathcal{S}_{Q_y}$ с $\det \mathcal{S}_{Q_y} = \mathcal{O}_{Q_y}(1)$, и мы положим $F_y = \mu^* \mathcal{S}_{Q_y}|_X$. Пучок F в этом случае — любой из пучков F_y для $y \in \Gamma$.

(III) В случае $X = X_5$ пучок F определяется как ограничение на X тавтологического расслоения на грассманиане $\mathrm{Gr}(2,5)$, подкрученное на $\mathcal{O}_X(1)$.

Теорема 6. *Пусть X — одно из многообразий X_1, X_2, X_4, X_5, и пусть $\mathcal{O}_X(1)$ — обильный пучок на X, такой, что $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}[\mathcal{O}_X(1)]$. Рассмотрим пучок E на X ранга 2, определенный одним из нетривиальных расширений вида*

$$0 \to F_i \to E \to G_j \to 0, \qquad 1 \le i \le 3, \quad 1 \le j \le 2, \tag{10}$$

где $F_1 = \mathcal{O}_X(-n)^{\oplus 2}$, $F_2 = F(-n)$, где F — пучок ранга 2 одного из типов (I)-(III), описанных выше, $G_1 = \mathcal{O}_S(m)$, где $S \in |\mathcal{O}_X(k)|$, и пучки F_3 и G_2 определены в случае квадрики $X = X_2$, а именно, $F_3 = \mathcal{S}(-n)$, где $\mathcal{S}$ — спинорное расслоение на X_2 с $\det \mathcal{S} = \mathcal{O}_X(1)$, и $G_2 = \mathcal{J}_{\mathbb{P}^1,S}(m)$, где $S \in |\mathcal{O}_X(1)|$, $\mathbb{P}^1$ — прямая на поверхности S. Пусть $M_X(v)$ схема модулей Гизекера–Маруямы полустабильных пучков на X с характером Черна $v = \mathrm{ch}(E)$, определяемым из тройки (10), и пусть

$$M := \{[E] \in M_X(v) \mid E \text{ — стабильное по Гизекеру расширение (10)}\}. \tag{11}$$

Тогда верны следующие утверждения.
(1) Для $X_1,\ X_2,\ X_4,\ X_5$ в случае $i = j = 1$, $k \ge 1$, $n = \lceil \frac{k}{2} \rceil$, $m < -n$,
(2) для $X_1,\ X_4,\ X_5$ в случае $i = 2$, $j = 1$, $k \ge 1$, $n = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, $m < -n$,
(3) для X_2 в каждом из случаев
(3.1) $i = 1$, $j = 2$, $n = 1$, $m \le -1$,
(3.2) $i = 3$, $j = 1$, $k \ge 1$, $n = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$, $m \le -n$,
(3.3) $i = 3$, $j = 2$, $n = 1$, $m \le -1$,
множество M является гладким плотным открытым подмножеством

неприводимой компоненты $\overline{M}$ *схемы модулей* $M_X(v)$*. Более того,* M *является тонким пространством модулей, и рефлексивные пучки образуют плотное открытое подмножество в* M*. Более того, все компоненты* $\overline{M}$ *из бесконечных серий (1), (2) и (3.1)-(3.3) являются рациональными многообразиями для каждого из многообразий* X_l*,* $l = 1, 2, 4, 5$*, кроме серии (2) для* $X = X_4$*, в которой каждая компонента не рациональна. Более того, во всех случаях найдены размерности компонент* $\overline{M}$*, являющиеся многочленами из* $\mathbb{Q}[k, m, n]$ *или* $\mathbb{Q}[m]$ *соответственно.*

Значительная часть нашей статьи [40] посвящена исследованию полустабильных пучков ранга 2 с максимальным классом c_3 на квадрике X_2. Мы показываем, что для $c_1 \in \{-1, 0\}$ и всех значений класса c_2, кроме нескольких малых значений, любой такой пучок задается расширением вида (10), то есть, в обозначениях (11), мы имеем равенство $M = \overline{M}$. В этом случае конструкция из доказательства теоремы 6 может быть значительно улучшена, давая полное описание пространств модулей полустабильных пучков с максимальным c_3 на X_2. В оставшихся случаях малых значений c_2 и максимального $c_3 \geq 0$ также было получено явное описание пространств модулей, кроме двух случаем, в которых мы доказали только то, что эти пространства не являются гладкими. В случае $(c_1, c_2) = (0, 1)$ мы доказали, что максимальное значение c_3 полустабильного пучка должно быть отрицательно, но не определили его точно. Эти результаты, доказанные в [40, Theorems 5.1 — 5.4], собраны в следующих двух теоремах.

Теорема 7. *Пусть* $X = X_2$ *— квадрика, и* $M_X(v)$ *схема модулей Гизекера–Маруямы полустабильных пучков* E *ранга 2 на* X *с классами Черна* (c_1, c_2, c_3)*, где* $c_1 \in \{-1, 0\}$*,* $c_2 \geq 0$*,* $c_3 = c_{3\max} \geq 0$ *максимально для каждого* c_2*, и*

$$v = \mathrm{ch}(E) = (2, c_1 H, \frac{1}{2}(c_1^2 - c_2)H^2, \frac{1}{2}(c_{3\max} + \frac{2}{3}c_1^3 - c_1 c_2)[\mathrm{pt}]),$$

где $H = c_1(\mathcal{O}_X(1))$*. Тогда имеют место следующие утверждения.*
(1.i) Для $c_1 = -1$*, четного* $c_2 = 2p$*,* $p \geq 2$*, и* $c_{3\max} = \frac{1}{2}c_2^2$ *многообразие* $M_X(v)$ *является грассманизацией двумерных факторпространств векторного расслоения ранга* $\frac{1}{4}(c_2+2)^2$ *на пространстве* $\mathbb{P}^4$*, определенного первой формулой (38) в [40] для* $n = 1$ *и* $m = -p$*. В этом случае* $\dim M_X(v) = \frac{1}{2}(c_2 + 2)^2$*.*
(1.ii) Для $c_1 = -1$*, нечетного* $c_2 = 2p+1$*,* $p \geq 1$*, и* $c_{3\max} = \frac{1}{2}(c_2^2 - 1)$ *многообразие* $M_X(v)$ *является грассманизацией двумерных факторпространств*

векторного расслоения ранга $\frac{1}{4}(c_2+1)(c_2+3)$ *на грассманиане* $\mathbb{G} = \mathrm{Gr}(2,4)$, *определенного второй формулой (38) в [40] для* $m = -p$. *В этом случае* $\dim M_X(v) = \frac{1}{2}(c_2+1)(c_2+3)$.

(1.iii) Для $c_1 = 0$, *нечетного* $c_2 = 2p+1$, $p \geq 1$, *и* $c_{3\max} = \frac{1}{2}(c_2^2+1)$ *многообразие* $M_X(v)$ *является проективизацией векторного расслоения ранга* $\frac{1}{2}(c_2+1)(c_2+3)$ *на пространстве* $\mathbb{P}^4$, *определенного формулой (61) в [40] для* $n = 1$ *и* $m = -p$. *В этом случае* $\dim M_X(v) = \frac{1}{2}c_2^2 + 2c_2 + \frac{9}{2}$.

(1.iv) Для $c_1 = 0$, *четного* $c_2 = 2p$, $p \geq 3$, *и* $c_{3\max} = \frac{1}{2}c_2^2$ *многообразие* $M_X(v)$ *является проективизацией векторного расслоения ранга* $\frac{1}{2}c_2^2 + 2c_2 + 1$ *на грассманиане* $\mathbb{G}$, *определенного формулой (77) в [40] для* $m = 1-p$. *В этом случае* $\dim M_X(v) = \frac{1}{2}c_2^2 + 2c_2 + 4$.

(2) Во всех указанных случаях схема $M_X(v)$ *неприводима и является гладким рациональным проективным многообразием, все пучки из* $M_X(v)$ *стабильны, общий пучок в* $M_X(v)$ *рефлексивен, и* $M_X(v)$ *является тонким пространством модулей.*

Теорема 8. *В условиях и обозначениях теоремы 7, верны следующие утверждения:*

(1) Для $c_1 = -1$, $c_2 = 1$ *и* $c_{3\max} = 0$, *многообразие* $M_X(v)$ *является точкой* $[\mathcal{S}(-1)]$.

(2) Для $c_1 = c_2 = c_{3\max} = 0$, *многообразие* $M_X(v)$ *является точкой* $[\mathcal{O}_X^{\oplus 2}]$.

(3) Для $c_1 = -1$, $c_2 = 2$ *и* $c_{3\max} = 2$ *мы имеем* $M_X(v) \simeq \mathrm{Gr}(2,5)$.

(4) Для $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ *и* $c_{3\max} = 2$ *схема* $M_X(v)$ *неприводима, имеет размерность 9 и не является гладкой.*

(5) Для $c_1 = 0$, $c_2 = 4$ *и* $c_{3\max} = 8$ *схема* $M_X(v) = M_X(2;0,4,8)$ *является объединением двух неприводимых компонент* M_1 *и* M_2. *Эти компоненты описываются следующим образом.*

(5.i) M_1 *— гладкое рациональное многообразие размерности 20, являющееся проективизацией локально свободного пучка ранга 17 на грассманиане* $\mathbb{G}$. M_1 *— тонкое пространство модулей и все пучки в* $M_X(v)_1$ *стабильны. Более того, схема* $M_X(v)$ *неособа в точках* M_1.

(5.ii) схема M_2 *неприводима, имеет размерность 21, и полистабильные пучки в* M_2 *образуют замкнутое подмножество размерности 12, в котором схема* $M_X(v)$ *не является гладкой.*

Мы выделим последнее утверждение (iii) в [40, Theorem 5.4] как отдельную теорему ввиду его важности.

Теорема 9. *Для квадрики $X = X_2$ схема $M_X(2;0,4,8)$ не связна:*

$$M_X(2;0,4,8) = M_1 \sqcup M_2,$$

и ее неприводимые компоненты M_1 и M_2 описаны выше в утверждениях (5.i)-(5.ii) теоремы 8.

Этот результат дает первый пример несвязной схемы модулей полустабильных пучков ранга два на гладком проективном трехмерном многообразии. В тех немногих известных к настоящему времени случаях, в которых обсуждался вопрос связности схемы модулей $M_X(2;c_1,c_2,c_3)$ с фиксированными c_1,c_2,c_3, объединение всех известных компонент схемы модулей оказывалось связным. В частности, в работе [21, Thm. 25, Thm. 27] была доказана связность схемы $M_{\mathbb{P}^3}(2;0,2,0)$, а также связность объединения семи известных к 2017 году неприводимых компонент схемы $M_{\mathbb{P}^3}(2;0,3,0)$, и в том же месте [21, Prop. 24] для произвольного положительного n была доказана связность объединения некоторого растущего с числом n числа компонент схемы $M_{\mathbb{P}^3}(2;0,n,0)$. В работе [1, Main Thm. 3] была доказана связность $M_{\mathbb{P}^3}(2;-1,2,m)$ для всех допустимых положительных значений m, а именно, для $m = 0,\ 2,\ 4$. По нашему мнению, одной из возможных причин несвязности схемы $M_{X_2}(2,0,4,8)$ в теореме 9 может быть то, что квадрика X_2, в отличие от $\mathbb{P}^3$, не является торическим многообразием.

Список литературы

[1] C. Almeida, M. Jardim, A. S. Tikhomirov. Irreducible components of the moduli space of rank 2 sheaves of odd determinant on projective space. Advances in Mathematics. **402** (2022). Article 108363.

[2] C. Almeida, M. Jardim, A. S. Tikhomirov, S. A. Tikhomirov. New moduli components of rank 2 bundles on projective space. Sbornik Mathematics. 2021. Vol. 212. No. 11. P. 1503-1552.

[3] V. Antonelli, G. Casnati, O. Genc. Even and odd instanton bundles on Fano threefolds. Asian J. Math. **26**, No. 1, (2022), P. 081–118.

[4] I. Artamkin. Stable bundles with $c_1 = 0$ on rational surfaces. Math. USSR Izvestiya, 36:2 (1991), P. 231-246.

[5] M. F. Atiyah, S. T. Ward. Instantons and algebraic geometry. Comm. Math. Phys, 1977, 55(2), P. 117-124.

[6] A. Bialynicki-Birula. Some theorems on actions of algebraic groups. Ann. Math. 1973. V. 98, N 3. P. 480–497.

[7] W. Barth, K. Hulek. Monads and moduli of vector bundles. Manuscripta Math. 25, P. 323–347 (1978).

[8] A. Bayer, E. Macri, Y. Toda. Bridgeland Stability conditions on threefolds I: Bogomolov-Gieseker type inequalities. J. Algebraic Geom. **23** (2014), 117–163.

[9] J. Brun, A. Hirschowitz, Variété des droites sauteuses du fibré instanton général, With an appendix by J. Bingener. Compositio Math. 53 (1984), P. 325–336.

[10] U. Bruzzo, D. Markushevich, A. S. Tikhomirov. Moduli of symplectic instanton vector bundles of higher rank on projective space $\mathbb{P}^3$. Central European Journal of Mathematics, 10, No. 4 (2012), P. 1232-1245.

[11] U. Bruzzo, D. Markushevich, A. S. Tikhomirov. Symplectic instanton bundles on P 3 and 't Hooft instantons. European Journal of Mathematics, 2 (2016), P. 73-86.

[12] G. Comaschi, M. Jardim, C. Martinez, D. Mu. Instanton sheaves: the next frontier. São Paulo J. Math. Sci. (2023).

[13] L. Costa, R. M. Miró-Roig. Monads and instanton bundles on smooth hyperquadrics. Mathematische Nachrichten, **282**(2) (2009), P. 169–179.

[14] L. Ein. Generalized null correlation bundles. Nagoya Math. J.. 1988. V. 111. P. 13–24.

[15] D. Faenzi. Even and odd instanton bundles on Fano threefolds of Picard number one. manuscripta math. **144** (2014), P. 199–239.

[16] D. Gieseker. On the moduli of vector bundles on an algebraic surface. Ann. Math. 106 (1977), P. 45-60.

[17] R. Hartshorne. Stable vector bundles of rank 2 on $\mathbf{P}^3$. Math. Ann. 1978. V. 238, N 3. P. 229–280.

[18] R. Hartshorne. Stable reflexive sheaves. Math. Ann. **254** (1980), P. 121–176.

[19] G. Horrocks. Construction of bundles in Pn. In: Les équations de Yang-Mills. A. Douady - J.L. Verdier séminaire E.N.S, Astérisque, vol. 71-72, 1977-1978, pp. 197–203.

[20] D. Huybrechts, M. Lehn. The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves. 2nd ed., Cambridge Math. Lib., Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[21] M. Jardim, D. Markushevich, A. S. Tikhomirov. Two infinite series of moduli spaces of rank 2 sheaves on P3. Ann. Mat. Pura Appl., 2017. V. 196. P. 1573–1608.

[22] P. I. Katsylo. Birational geometry of moduli varieties of vector bundles over $\mathbf{P}^2$. Mathematics of the USSR-Izvestiya, 38(2), (1992), P. 419–428.

[23] Kollar J. Lectures on resolution of singularities. Annals of Mathematics Studies, Princeton, NJ: Princeton University Press, **166**, 2007.

[24] A. Kuznetsov. Instanton bundles on Fano threefolds. Cent. Eur. J. Math., **10**(4) (2012), P. 1198–1231.

[25] M. Maruyama. Moduli of stable sheaves I. J. Math. Kyoto Univ. 17 (1977), P. 91-126.

[26] M. Maruyama. Moduli of stable sheaves II. J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978), P. 557- 614.

[27] D. Mumford. Projective invariants of projective structures and applications. Proc. Intern. Cong. Math. Stockholm (1962), P 526-530.

[28] C. Okonek, C. Schneider, H. Spindler. Vector bundles on complex projective spaces (Corrected reprint of the 1988 Edition). Basel: Birkhäuser, 2011.

[29] A. P. Rao. A note on cohomology modules of rank two bundles. J. Algebra. 1984. V. 86, N 1. P. 23–34.

[30] B. Schmidt. A generalized Bogomolov-Gieseker inequality for the smooth quadric threefold. Bull. Lond. Math. Soc. **46**, no. 5, (2014), P. 915–923.

[31] B. Schmidt. Rank two sheaves with maximal third Chern character in three-dimensional projective space. Matematica Contemporanea, Vol. **47** (2018), P. 228–270.

[32] B. Schmidt. Bridgeland Stability on Threefolds – Some Wall Crossings. J. Algebraic Geom. **29** (2020), P. 247–283.

[33] B. Schmidt. Sheaves of low rank in three-dimensional projective space. Eur. J. Math. **9**:103 (2023), P. 3-71.

[34] A. S. Tikhomirov. Moduli of mathematical instanton vector bundles with odd c_2 on projective space. Izv. RAN. Ser. Mat., 76:5 (2012), P. 143–224; Izv. Math., 76:5 (2012), P. 991–1073.

[35] A. S. Tikhomirov. Moduli of mathematical instanton vector bundles with even c_2 on projective space. Izv. RAN. Ser. Mat., 77:6 (2013), P. 139–168; Izv. Math., 77:6 (2013), P. 1195–1223.

[36] A. Tikhomirov, S. Tikhomirov, D. Vasiliev. Construction of stable rank 2 vector bundles on $\mathbb{P}^3$ via symplectic bundles. Siberian Mathematical Journal, vol. **60**:2 (2019), P. 343-358.

[37] Alexander Tikhomirov, Danil Vassiliev. Construction of symplectic vector bundles on projective space $\mathbb{P}^3$. Journal of Geometry and Physics, Volume 158, December 2020, 103949.

[38] G. Trautmann, R. M. Miro-Roig. The moduli scheme M(0,2,4) over P3. Math. Z.. 1994. V. 216, N 2. P. 283–316.

[39] D. A. Vassiliev. An Infinite Series of Rational Components of the Moduli Space of Rank 3 Sheaves on P3. Siberian Mathematical Journal. 2023. Vol. 64. No. 3. P. 525-541.

[40] D. A. Vasil'ev, A. S. Tikhomirov. Moduli of rank two semistable sheaves on rational Fano threefolds of the main series. Mat. Sb., **215**:10 (2024), 3–57.